

# ESTIMATION OF TWO-LAYER SOIL MODEL PARAMETERS FOR GROUNDING SYSTEMS USING NON-LINEAR OPTIMIZATION

## ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO DEL SUELO DE DOS CAPAS PARA LOS SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA UTILIZANDO OPTIMIZACIÓN NO LINEAL

Juan Ramirez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Escuela Politécnica Nacional del Ecuador, Quito, Ecuador  
E-mail: [juan.ramirez@epn.edu.ec](mailto:juan.ramirez@epn.edu.ec)

### RESUMEN

En este artículo se ejecuta la estimación de los parámetros del modelo de dos capas para la resistividad del suelo. Este modelo es ampliamente utilizado en el diseño de los sistemas de puesta a tierra. Para la estimación se parte de los datos de resistividad del suelo medida en el campo con el método de Wenner. Posteriormente, estos datos son comparados con la ecuación de resistividad de Tagg que sirve como modelo, luego se establece una función de error entre el modelo y los datos medidos en el campo. Esta función de error tiene tres variables: resistividad de la capa superior, resistividad de la capa inferior y profundidad de la capa superior. La función de error se minimiza con algoritmos de optimización no lineal y se obtienen las tres variables más adecuadas para el modelo del suelo.

**Palabras clave**—resistividad aparente, resistividad del suelo, sistemas de puesta a tierra, optimización.

### ABSTRACT

In this article, the estimation of the parameters of the two-layer model for soil resistivity is carried out. This model is widely used in the design of grounding systems. For the estimation, we start from the soil resistivity data measured in the field with the Wenner method. Subsequently, these data are compared with the Tagg resistivity equation that serves as a model, then an error function is established between the model and the data measured in the field. This error function has three variables: upper layer resistivity, lower layer resistivity, and upper layer depth. The error function is minimized with non-linear optimization algorithms and the three most suitable variables for the soil model are obtained.

**Index terms**—apparent resistivity, soil resistivity, grounding systems, optimization.

## 1. INTRODUCCIÓN.

En el diseño de los sistemas de puesta a tierra se necesita utilizar un modelo del suelo que contiene el o los valores de la resistividad eléctrica  $\rho$  en [ $\Omega \cdot m$ ] que influye en el valor de la resistencia de puesta a tierra de los electrodos (IEEE Power and Energy Society, 2013).

Las normas ANSI IEEE 80 y 81 (Committee, 2012; IEEE Power and Energy Society, 2013) presentan los métodos de medición de la resistividad del suelo que se pueden aplicar en el campo y son: el método de Wenner y el método de Schlumberger-Palmer. El método de Wenner es utilizado con mayor frecuencia debido a la facilidad de su aplicación y de cálculo (Wenner, 1916).

Los valores medidos de la resistividad del suelo normalmente presentan una heterogeneidad en sus valores, y esto se debe entre otras variables a las condiciones geológicas del suelo (Committee, 2012; IEEE Power and Energy Society, 2013). Ante estos cambios la norma ANSI IEEE 80 recomienda utilizar un modelo de suelo de al menos dos capas. En este modelo el suelo se considera como una capa superior de resistividad  $\rho_1$  y con una profundidad  $h_1$ , y una capa inferior de resistividad  $\rho_2$  con una profundidad  $h_2$  que es infinita.

Para poder encontrar las tres variables del modelo ( $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $h_1$ ) se pueden aplicar diversos métodos que se enfocan en obtener una curva de resistividad aparente calculada que se ajuste a la curva de resistividad medida en el campo.

De esta manera, en este artículo se presenta la estimación de los parámetros del modelo del suelo de dos capas a través de la minimización de una función de error que calcula la diferencia entre la curva de resistividad medida y la calculada. Para la minimización de esta función se utilizan algoritmos de optimización no lineal.

## 2. MÉTODOS

### 2.1. Método de solución

La metodología propuesta parte de obtener las mediciones de resistividad aparente en función de la profundidad en el campo con la utilización de un telurómetro y por medio de los métodos de Wenner o el método de Schlumberger-Palmer. Estos métodos de medición de resistividad son ampliamente conocidos en el área de la ingeniería eléctrica y están claramente detallados en las Normas ANSI IEEE 81 (Committee, 2012) y ANSI IEEE 80 (IEEE Power and Energy Society, 2013). Ésta será la curva de resistividad medida a la que se le realizará un ajuste con un modelo.

La Norma ANSI IEEE 80 plantea un modelo de dos capas en el que pueden emplearse las ecuaciones (1) y (2) (IEEE Power and Energy Society, 2013; Tagg, 1964).

$$k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (1)$$

Donde:

$k$  = coeficiente de reflexión

$\rho_1$  = Resistividad de la capa superior del terreno [ $\Omega \cdot m$ ]

$\rho_2$  = Resistividad de la capa inferior del terreno [ $\Omega \cdot m$ ]

$$\rho_{aj} = \rho_1 \left[ 1 + 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{k^n}{\left(1 + \left(\frac{2n}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{k^n}{\left(1 + \left(\frac{4n}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \right] \quad (2)$$

Donde:

$\rho_{aj}$  = Resistividad aparente calculada para cada profundidad  $a$  [ $\Omega \cdot m$ ]

$\rho_1$  = Resistividad de la capa superior del terreno [ $\Omega \cdot m$ ]

$k$  = coeficiente de reflexión

$\alpha$  = profundidad del terreno [m]

Con (2) se determinan las resistividades aparentes del suelo en base al modelo de Tagg. Este modelo depende de tres factores:  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $h_1$  que son la resistividad aparente de la capa superior, capa inferior y la profundidad de la capa superior respectivamente, de un modelo de dos capas del suelo (Tagg, 1964).

El objetivo es obtener una curva a través del modelo que coincida aproximadamente con cada medida de resistividad aparente del suelo realizada en el campo. Para ello habría que variar los parámetros  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $h_1$  en (2). Esta ecuación posee un sumatorio infinito y radicales, por lo que la variación de estos parámetros es compleja, y se puede resolver mediante algoritmos de optimización en la minimización de funciones multivariables. Se plantea una función objetivo que minimice la condición dada en (3):

$$FO = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\rho_{aj} - \rho_{amj}}{\rho_{amj}} \right)^2 \quad (3)$$

Donde:

$\rho_{aj}$  = Resistividad aparente medida para cada profundidad  $a$  [ $\Omega$ -m]

$\rho_{amj}$  = Resistividad aparente calculada con (2) para cada profundidad  $a$  [ $\Omega$ -m]

La función FO de (3) básicamente es una función de error entre las curvas de resistividad medida y calculada para un mismo suelo. Entonces para minimizar FO se puede recurrir a múltiples técnicas de optimización.

En este artículo se han utilizado los algoritmos de minimización no lineal: Levenberg-Marquardt (LM) y Trust-region-reflective (TRR) que pueden aplicarse en casos de minimización de funciones

como la de (3) (*Least-Squares (Model Fitting) Algorithms - MATLAB & Simulink - MathWorks América Latina*). Se utiliza la función `lsqnonlin` de MATLAB que permite aplicar estos algoritmos en funciones implementadas en código .m (MathWorks). La función `lsqnonlin` básicamente necesita una función de error dependiente de unos parámetros, esta función se ha llamado *f.m* y se aprecia en el código de la Tabla 1. Esta función tiene como argumento de entrada un vector de tres elementos que son precisamente  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $h_1$ . Luego, calcula las resistividades del suelo con (2) y las compara con datos medidos y devuelve el error entre los datos medidos y calculados.

En la Tabla 2 se presenta el código de optimización que utiliza la función `lsqnonlin` para llamar a la función *f.m*, optimiza los parámetros  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $h_1$  y los almacena en un vector *X*. Finalmente grafica las curvas de resistividad medidas y calculadas para observar el ajuste. Para graficar la curva de resistividades calculadas se utiliza la función *curva.m* cuyo código dado en la Tabla 3 es idéntico al de la función *f.m* con la diferencia de que esta función devuelve los valores calculados de resistividad y no el error. Los datos medidos se ingresan como vectores fila en los tres códigos, en los vectores *x* para las distancias  $a$  de las mediciones y en el vector *y* para las resistividades obtenidas en las mediciones, en ohmios y ohmios.metro respectivamente.

## 2.2. Casos de estudio

En la Tabla 4 se presentan cinco casos de estudio a partir de mediciones realizadas en el campo para ser optimizadas con el algoritmo propuesto. El algoritmo de optimización requiere de un punto  $x_0$  inicial, este es un vector de tres elementos ( $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $h_1$ ) que sirve como punto inicial del cálculo en las funciones a ser optimizadas.

**Tabla 1**  
**Código de la función f.m**

---

```
function F_err=f(vect)
%función que calcula la resistividad con la ecuación de Tagg
%vect es un vector que tiene tres elementos: [p1 p2 h1]
%luego compara la resistividad calculada con la medida y arroja el error
%Datos medidos
x=[1 2 4 10 20 40]; % a en metros
y=[126 136 210 435 670 795]; % p medida en ohms.m
%modelo de Tagg
sum=0;
for m=1:length(x)
k=(vect(2)-vect(1))/(vect(2)+vect(1));
h1=vect(3);
p1=vect(1);
a=x(m);
for d=1:10
p_a=(k^d/sqrt(1+(2*d*h1/a)^2))-(k^d/sqrt(4+(2*d*h1/a)^2));
sum=sum+p_a;
end
y_med(m)=p1*(1+4*sum);
sum=0;
end
F_err=y-y_med;
end
```

---

**Tabla 2**  
**Código de la optimización**

---

```
clc
close all
clear all
%% inicialización de parámetros
xo=[10 10 2]; %punto inicial [p1 p2 h1]
%Algoritmo de optimización
%método se puede cambiar por 'trust-region-reflective' o 'levenberg-
marquardt'
options = optimoptions('lsqnonlin','Display','iter','Algorithm','levenberg-
marquardt');
%Vector con el resultado es X
[X,resnorm,residual,exitflag,output]=lsqnonlin(@f,xo,[],[],options);
%graficación
y2=curva(X); %obtengo la curva con los valores optimizados
%datos de la curva medida
x=[1 2 4 10 20 40]; % a en metros
y=[126 136 210 435 670 795]; % p medida en ohms.m
disp('Los resultados del modelo son: ')
disp('resistividad p1 [ohms.metro]: ')
X(1)
disp('resistividad p2 [ohms.metro]: ')
X(2)
disp('profundidad de la primera capa h1 [metros]: ')
X(3)
plot(x,y,'ko',x,y2,'b-')
legend('Curva de resistividad medida','Modelo ajustado')
xlabel('profundidad a [m]')
ylabel('resistividad p [ohmios.metro]')
```

---

**Tabla 3**  
**Código de la función curva.m**

---

```
function F_err=curva(vect)
%función que calcula la resistividad con la ecuación de Tagg
%vect es un vector que tiene tres elementos:
%[p1 p2 h1]
% y devuelve los valores de resistividad calculados
%Datos medidos
x=[1 2 4 10 20 40]; % a en metros
y=[126 136 210 435 670 795]; % p medida en ohms.m
%modelo de Tagg
sum=0;
for m=1:length(x)
k=(vect(2)-vect(1))/(vect(2)+vect(1));
h1=vect(3);
p1=vect(1);
a=x(m);
```

---

```

for d=1:10
p_a=(k^d/sqrt(1+(2*d*h1/a)^2))-(k^d/sqrt(4+(2*d*h1/a)^2));
sum=sum+p_a;
end
y_med(m)=p1*(1+4*sum);
sum=0;
end
F_err=y_med;
End
    
```

Tabla 4  
Casos de estudio para la estimación de los parámetros

Caso	Mediciones	1	2	3	4	5	6	7	8
1	a [m]	2	4	6	8	10	12		
	$\rho_a$ [ $\Omega$ .m]	300	225	180	160	155	140		
2	a [m]	1	3	5	7	9	11		
	$\rho_a$ [ $\Omega$ .m]	250	280	310	370	510	650		
3	a [m]	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\rho_a$ [ $\Omega$ .m]	58	62	58	62	75	78	79	78
4	a [m]	3	6	9	12	15	18	21	24
	$\rho_a$ [ $\Omega$ .m]	450	360	240	180	145	125	110	95
5	a [m]	1	2	4	10	20	40		
	$\rho_a$ [ $\Omega$ .m]	126	136	210	435	670	795		

Fuente: Propia.

### 3. RESULTADOS

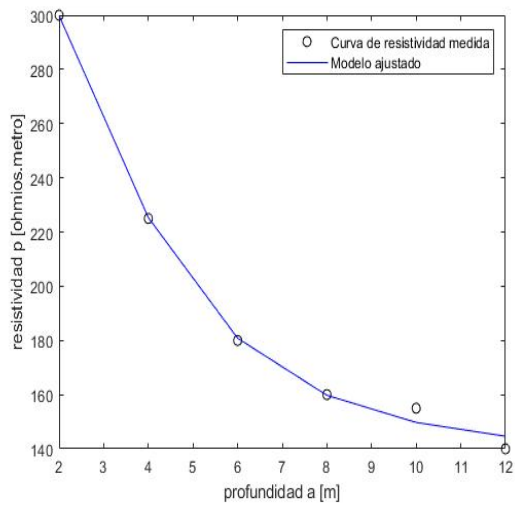
La solución de los casos de estudio descritos en la sección dos se presentan en la Tabla 5. Los resultados de la solución de los casos 1 a 5 con el método LM se presentan en las Figura 1, 2, 3, 4, y 5. En la Figura 6 se presenta el resultado del caso 1 con el método TRR con un punto de arranque  $x_0$  mal seleccionado. En la Figura 7 se presenta la

solución del caso 1 con el método TRR. No se presentan las gráficas de los casos 2 al 5 con el método TRR porque son idénticas a las figuras de los casos respectivos con el método LM.

Tabla 5  
Resultados de los modelos de resistividad del suelo

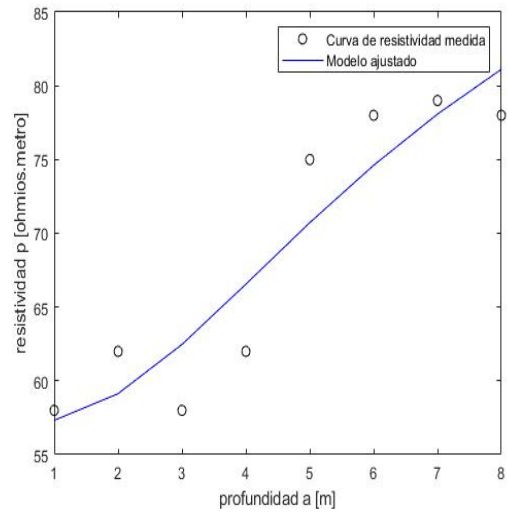
Método	Resultado	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
Levenberg-Marquardt (LM)	$\rho_1$ [ $\Omega$ .m]	336.4548	242.0343	56.9984	482.6590	105.8782
	$\rho_2$ [ $\Omega$ .m]	135.3418	2.8652E9	106.4259	87.2504	1068.7
	h1 [m]	2.3328	5.9299	3.3611	5.4455	2.1188
Trust-region-reflective (TRR)	$\rho_1$ [ $\Omega$ .m]	336.4548	242.035	56.9926	482.6590	105.8779
	$\rho_2$ [ $\Omega$ .m]	135.3418	2E9	106.3581	87.2504	1068.7
	h1 [m]	2.3328	5.9299	3.3573	5.4455	2.1188

Fuente: Propia.



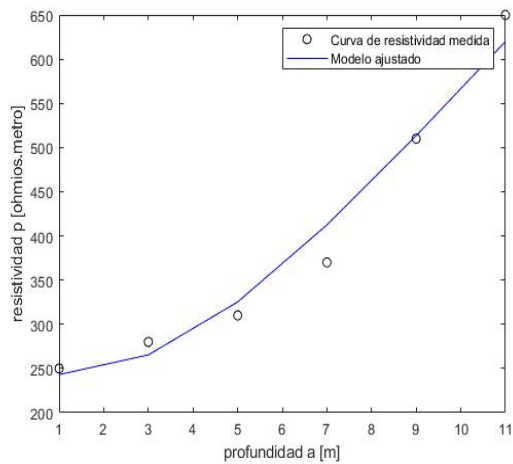
**Figura 1:** Curvas de resistividad medida y ajustada del caso 1 con el método LM.

Fuente: propia



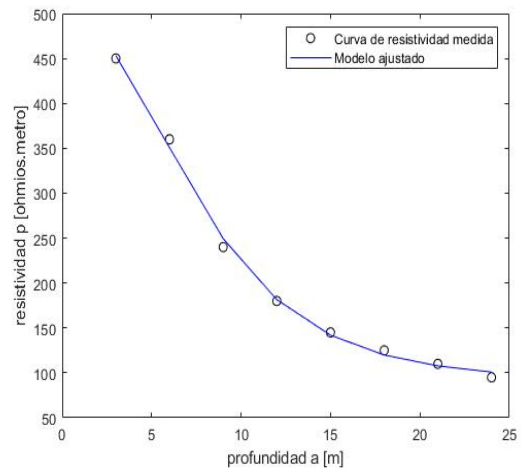
**Figura 3:** Curvas de resistividad medida y ajustada del caso 3 con el método LM.

Fuente: propia



**Figura 2:** Curvas de resistividad medida y ajustada del caso 2 con el método LM.

Fuente: propia



**Figura 4:** Curvas de resistividad medida y ajustada del caso 4 con el método LM.

Fuente: propia

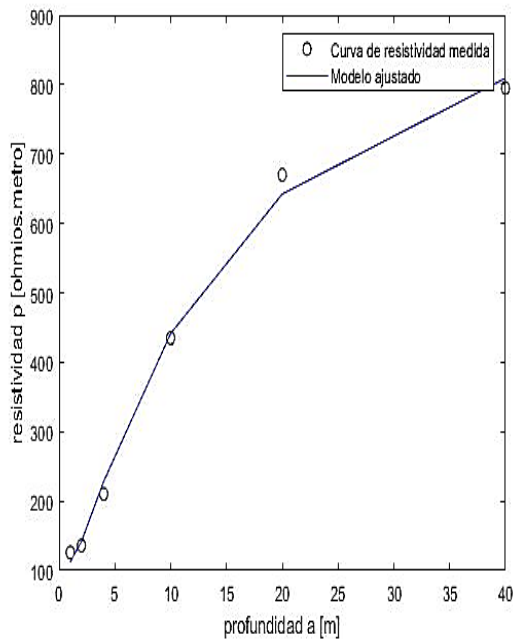


Figura 5: Curvas de resistividad medida y ajustada del caso 5 con el método LM.  
Fuente: propia

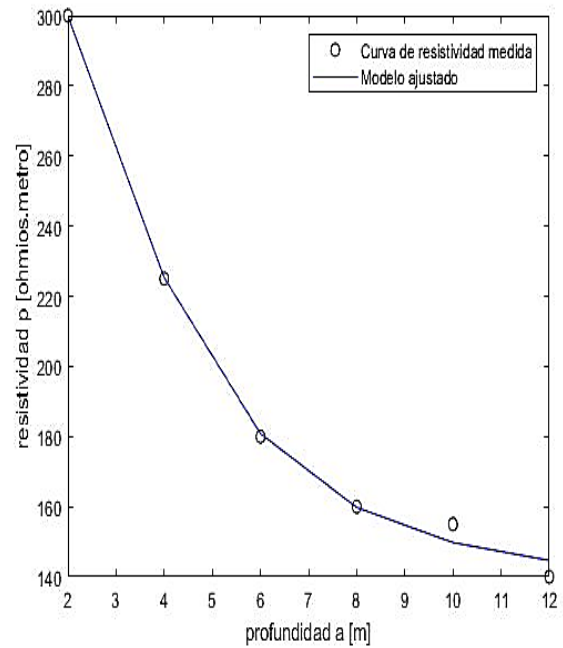


Figura 7: Curvas de resistividad medida y ajustada del caso 1 con el método TRR con un buen punto xo.  
Fuente: propia

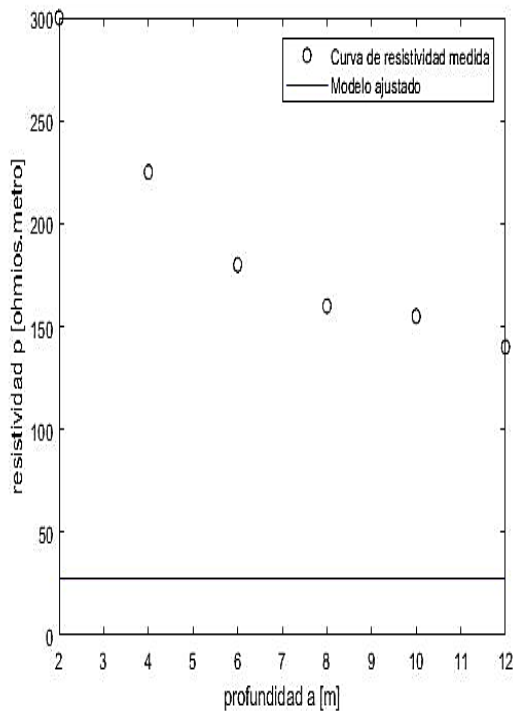


Figura 6: Curvas de resistividad medida y ajustada del caso 1 con el método TRR con un mal punto xo.  
Fuente: propia

#### 4. DISCUSIÓN.

Las soluciones de los casos 1 al 5 con el método LM que se aprecian en las Figuras 1 a 5 presentan un ajuste adecuado entre los datos y los cálculos, se puede apreciar en estas figuras como las curvas azules calculadas pasan en algunos casos por todos los puntos medidos, por lo que se obtiene un modelo aceptable para ser aplicado en los diseños de los sistemas de puesta a tierra. Los valores de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $h_1$  de estos modelos se presentan en la Tabla 5.

Las soluciones con el método LM no presentaron inconvenientes en el momento de calcularse con el programa, y se probaron varios puntos de inicio xo del algoritmo y la solución siempre era la misma.

Por su parte el método TRR se aplicó en el caso 1 con un punto xo lejano a la solución del método LM, y el algoritmo convergió a otra solución que se observa en la Figura 6. Es evidente que la solución

no se ajusta a las mediciones. Se realizaron diferentes pruebas y se obtuvo esa respuesta cuando los puntos  $x_0$  estaban muy lejos de la solución. Luego, se utilizó un punto  $x_0$  bastante cercano a las soluciones de cada caso del método LM y el algoritmo TRR convergió a la solución adecuada, como se observa en la Figura 7.

Con ese ajuste en los puntos  $x_0$  las soluciones del algoritmo TRR son prácticamente las mismas soluciones del algoritmo LM, como se presenta en la Tabla 5. Aunque, sí cambian un poco en algunos casos, por ejemplo, en el caso 3:  $h_1$  tiene un valor de 3.3611 con el método LM y un valor de 3.3573 con el método TRR.

Podemos entender que las diferencias en las soluciones son pequeñas y se deben a las diferentes técnicas matemáticas que aplica cada algoritmo de optimización. Sin embargo, en la mayoría de los casos los resultados son prácticamente los mismos.

En la práctica, será más sencillo escoger el método de Levenberg-Marquardt porque presentó una buena consistencia en la obtención de los resultados ante diferentes puntos de partida arbitrarios  $x_0$ .

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Los parámetros del modelo del suelo de dos capas de Tagg que son la resistividad de la capa superior  $\rho_1$ , la resistividad de la capa inferior  $\rho_2$  y la profundidad de la capa superior  $h_1$  se pueden calcular mediante una comparación entre datos de resistividad medidos en el campo y el respectivo cálculo teóricos de los valores de la resistividad variando los parámetros  $\rho_1, \rho_2, h_1$ .

A través de métodos de optimización multivariables se puede minimizar la diferencia entre los valores de la resistividad medidos y calculados y hallar los parámetros  $\rho_1, \rho_2, h_1$  que optimizan el modelo matemático, tal como se ha

presentado en este artículo en las secciones 3 y 4. Se pudo determinar que la solución del problema de optimización fue mejor con el método Levenberg-Marquardt porque no dependió del punto de arranque  $x_0$  del algoritmo.

Con la metodología presentada en este artículo se puede calcular fácilmente el modelo del suelo de dos capas para los diseños de sistemas de puesta a tierra y en trabajos futuros aplicar los mismos principios para un modelo multicapa, así como aplicar otros algoritmos de optimización y utilizar otros lenguajes de programación.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Committee, S. (2012). IEEE Guide for Measuring Earth Resistivity, Ground Impedance, and Earth Surface Potentials of a Grounding System - Redline. *IEEE Std 81-2012 (Revision of IEEE Std 81-1983) - Redline, 2012*(December), 1–192. <https://doi.org/10.1109/IEEESTD.2012.6392181>

IEEE Power and Energy Society. (2013). IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding. *IEEE Std 80-2013 (Revision of IEEE Std 80-2000/ Incorporates IEEE Std 80-2013/Cor 1-2015)*, February, 1–226. <https://doi.org/10.1109/IEEESTD.2015.7109078>

*Least-Squares (Model Fitting) Algorithms - MATLAB & Simulink - MathWorks América Latina*. (n.d.). Retrieved May 14, 2022, from <https://la.mathworks.com/help/optim/ug/least-squares-model-fitting-algorithms.html#broz0i4>

MathWorks. (n.d.). *MATLAB lsqnonlin*. Retrieved May 14, 2022, from <https://la.mathworks.com/help/optim/ug/lsqnonlin.html>

Tagg, G. (1964). *Earth resistances*. Pitman Pub. Corp.

Wenner, F. (1916). *A Method of Measuring*



*Resistivity* (Vol. 12).  
[https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as\\_sdt=0%2C5&q=WENNER%2C+F.+A+Method+of+Measuring+Resistivity%2C+&btnG=](https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=WENNER%2C+F.+A+Method+of+Measuring+Resistivity%2C+&btnG=)